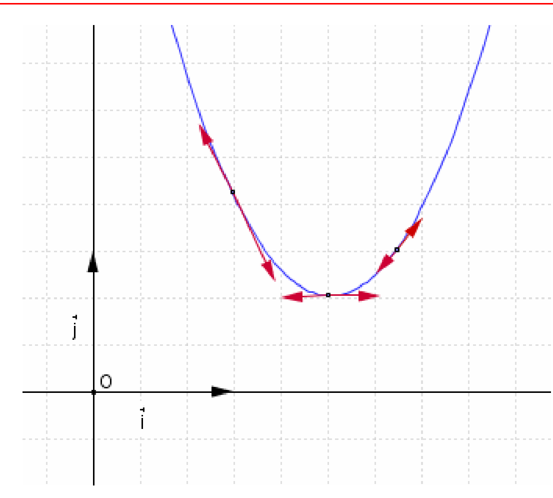
التمثيل المبياني لدالة

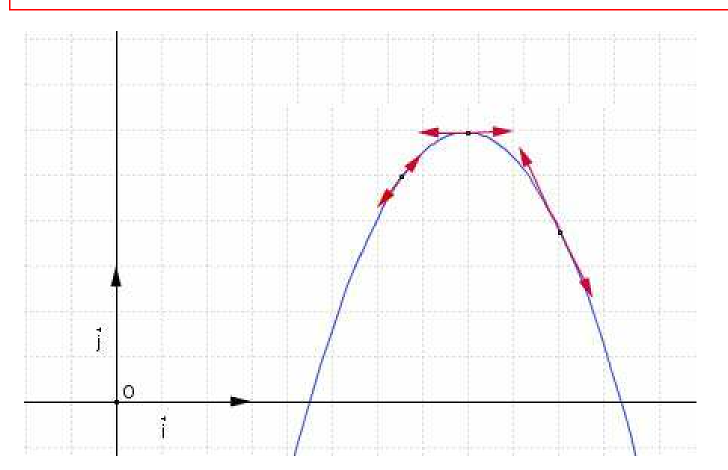
1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1 تعـريف

لـتكن f قابـلة للاشتـــــقاق على مجال I
نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماسـاته
نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماسـاته



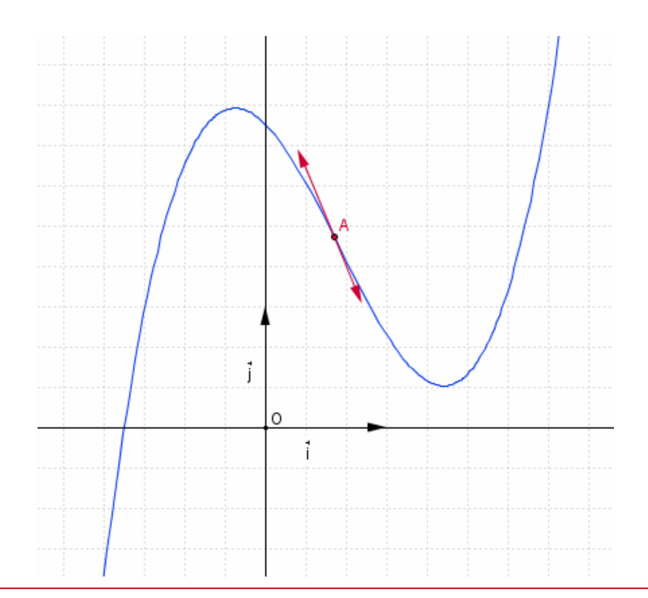
محدب



مقعر

2-1 تعـــريف

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتـــقاق على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
نقول ان النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) اذا تغير تقعر المنحنى (C_f) عند A



3-1 خـــاصيات

f دالة قابلة الاشتـــــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت "f موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا على I
* إذا كانت "f سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا على I
* اذا كانت "f تـنعدم في x_0 من الـمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشـارة "f على $[x_0, x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة "f على$]x_0-\alpha, x_0]$ فان $M_0(x_0; f(x_0))$ نقـطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظـــــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتـقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

تمرين $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ و $g(x) = \dfrac{1-2x}{x^2 - x - 2}$

1- أدرس تقعر C_f و استنتج أن النقطة A ذات الأفصول 1 نقطة انعطاف للمنحنى C_f

2 - أدرس تقعر C_g و حدد نقط انعطاف المنحنى C_g

2- الفروع اللانهـــائية

1-2 تعريف

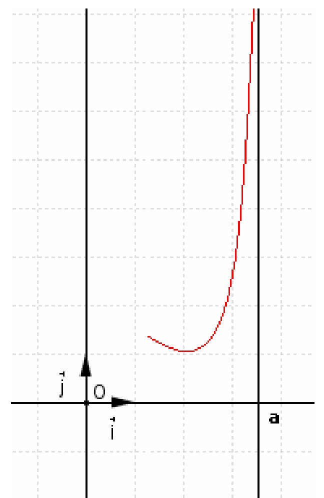
إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقـطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

أ- المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف

إذا كان $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب ل C_f



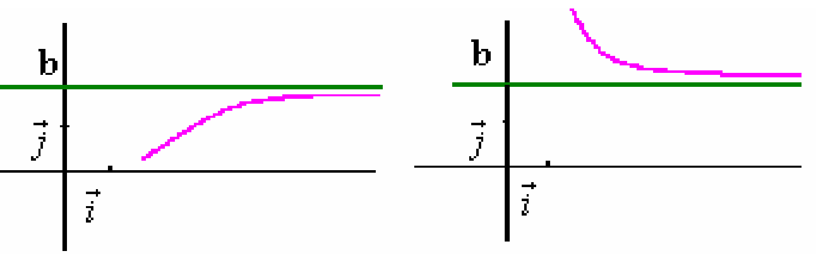
مثال $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

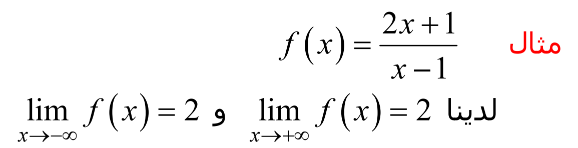
لدينا $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ و منه المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى

ب- المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

تعريف

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة $y = b$ مقارب ل C_f.

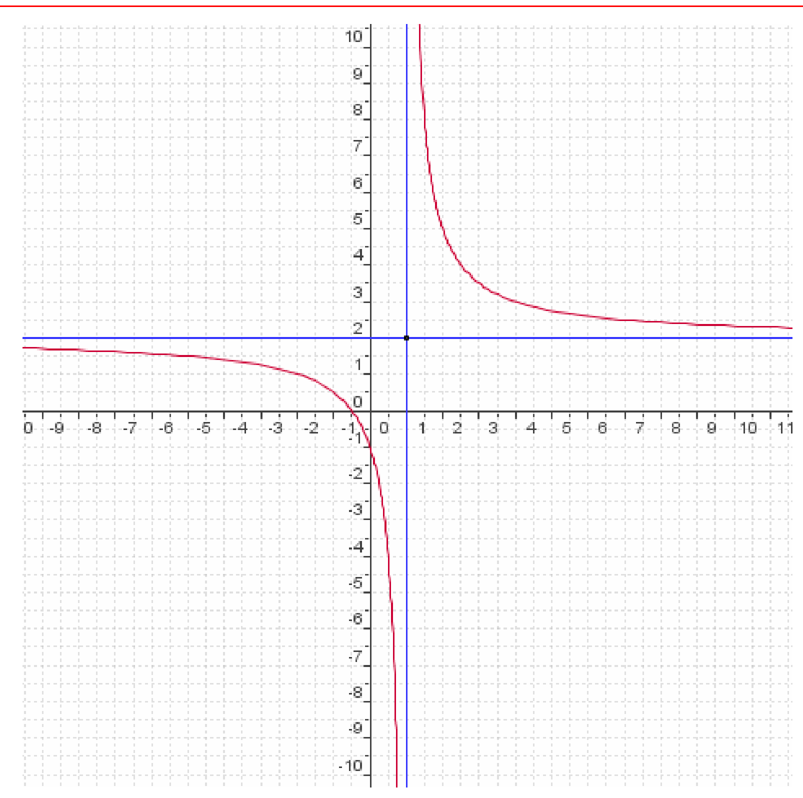




مثال $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

و منه المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى



ج- المقارب المائل

تعريف

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

أو $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

خاصية

يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كانت توجد دالة h حيث يكون $f(x)=ax+b+h(x)$ و ($\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}h(x)=0$)

مثال

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$

لدينا $f(x)=x-2-\frac{1}{x-1}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى(بجوار $+\infty$)

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-1}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى(بجوار $-\infty$)

في كثير من الأحيان يصعب كتابة على شكل $f(x)=ax+b+h(x)$ حيث $\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=0$

تقنية تحديد مقارب مائل

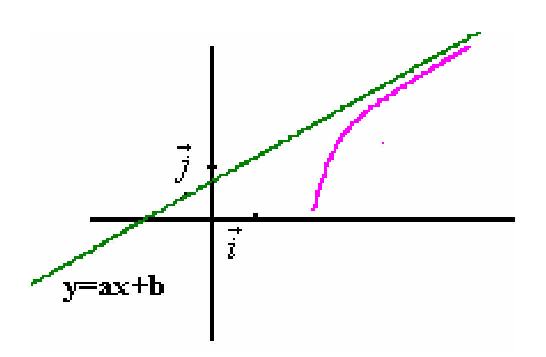
لنفترض أن $f(x)=ax+b+h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$

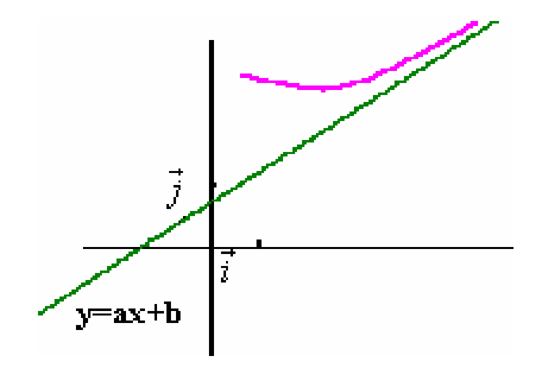
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x}h(x)\right)=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(b+h(x)\right)=b$$

عكسيا إذا كان $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \;;\; \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right)$ فان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \;;\; \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right)$ أو $\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \;;\; \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=b\right)$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

مثال

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x-2}$$

حدد المقارب المائل بجوار $+\infty$ ثم بجوار $-\infty$

2- 3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

ب - إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الافاصيل

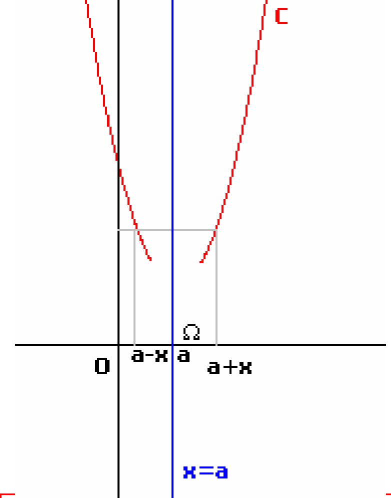
ج - إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذا المعادلة y= ax

بصفة عامة

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3- 1 محور تماثل



اذا كان (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $x=a$ كمحور تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(a;0)$

هي على شكل $Y=f(a+X)=\varphi(X)$ حيث φ دالة زوجية و $\begin{cases} X=x-a \\ Y=y \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X)=\varphi(X) \quad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a-X)=f(a+X) \quad \forall X\in D_\varphi$

بما أن $X=x-a$ فان $f(2a-x)=f(x) \quad \forall x\in D_f$

خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x\in D_f \quad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=f(x)$$

3-2 مركز تماثل

اذا كان (C_f) يقبل النقطة $\Omega(a;b)$ كمركز تماثل

فهذا يعني أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$

هي على شكل $Y+b=f(a+X)$

أي $Y=f(a+X)-b=\varphi(X)$

حيث φ دالة فردية و $\begin{cases} X=x-a \\ Y=y-b \end{cases}$

أي أن $\varphi(-X)=-\varphi(X) \quad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a-X)-b=-f(a+X)+b \quad \forall X\in D_\varphi$

أي $f(a-X)=2b-f(a+X) \quad \forall X\in D_\varphi$

بما أن $X=x-a$ فان $f(2a-x)=2b-f(x) \quad \forall x\in D_f$

خاصية

في معلم ما,تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان

$$\forall x\in D_f \quad (2a-x)\in D_f \quad ; \quad f(2a-x)=2b-f(x)$$

تمرين

1) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ بين أن المستقيم $(D): x=1$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

2) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$ بين أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

4- الدالة الدورية

1-4 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث

$$\forall x \in D_f \qquad x+T \in D_f \ ; \quad x-T \in D_f \qquad f(x+T)=f(x)$$

العدد T يسمى دور الدالة f. اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

أمثلة

* الدالتان $x \to \cos x$ و $x \to \sin x$ دوريتان و دورهما 2π
* الدالة $x \to \tan x$ دورية دورها π
* الدالتان $x \to \cos ax$ و $x \to \sin ax$ (حيث $a \neq 0$) دوريتان و دورهما $\dfrac{2\pi}{|a|}$
* الدالة $x \to \tan ax$ (حيث $a \neq 0$) دورية دورها $\dfrac{\pi}{|a|}$

تمرين

حدد دورا للدوال $x \to \cos x-\sin x$ و $x \to 3-\cos\dfrac{1}{4}x$ و $x \to \tan 3x$ و $x \to \cos^2 x$

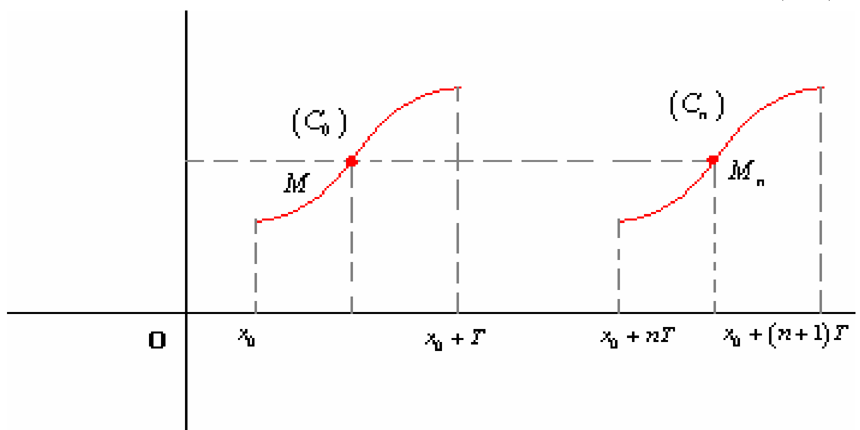
4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\qquad f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f, \forall n\in\mathbb{Z}$

(نبين الخاصية بالاستدلال بالترجع)

3-4 التمثيل المبياني لدالة دورية

لتكن f دورية دورها T و (C_f) منحناها في مستوى منسوب ال معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$



منحنى الـدالة f على $D_f \cap [x_0+nT;x_0+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f \cap [x_0,x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

ملاحظة:

لإنشاء منحنى دالة دورية يكفي إنشائة جزئه على مجال من نوع $I_0=D_f\cap[x_0,x_0+T[$

استنتاج المنحنى باستعمال الإزاحة $t_{Tn\vec{i}}$

أمثلة

* دالة $x \to \cos x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $[-\pi;\pi]$

و حيث أن $x \to \cos x$ زوجية فنقتصر دراستها على $[0;\pi]$

$$\forall x\in[0;\pi] \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

جدول التغيرات

x	0	π
$\cos x$	1 ↘	-1

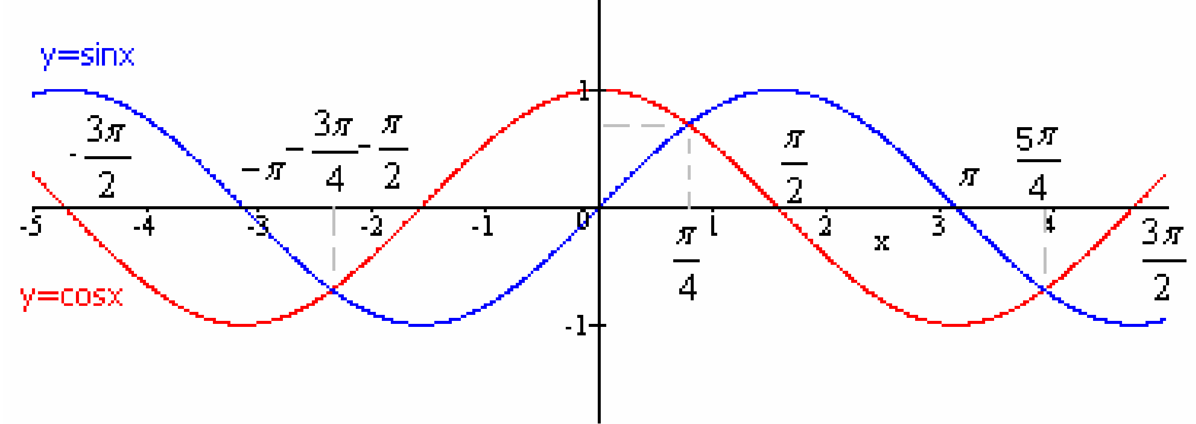
دالة $x \to \sin x$ دورية ودورها 2π إذن يكفي دراستها على $\left]-\pi;\pi\right]$

و حيث أن $x \to \sin x$ فردية فنقتصر دراستها على $\left[0;\pi\right]$

$$\forall x \in \left[0;\pi\right] \qquad (\sin x)' = \cos x$$

جدول التغيرات

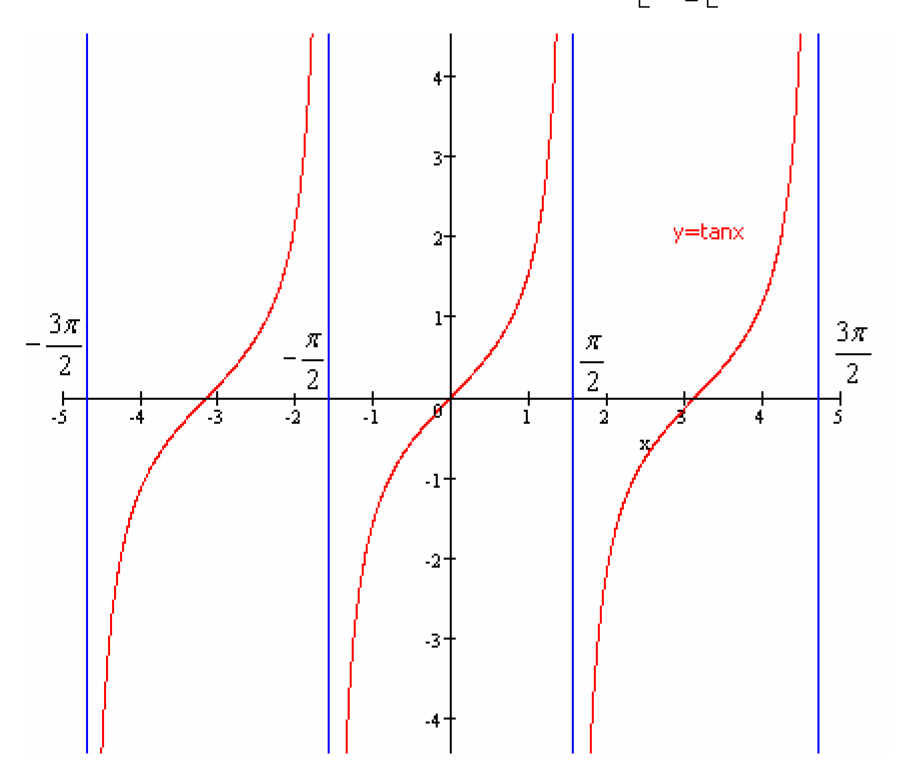
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1	↘ 0



** دالة $x \to \tan x$ حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ و دورية ودورها π إذن يكفي دراستها على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

و حيث أن $x \to \tan x$ فردية زوجية فنقتصر دراستها على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\qquad (\tan x)' = 1+\tan^2 x$$



جدول التغيرات

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0 ↗	$+\infty$

تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية
- دراسة التقعر ان كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى

تمرين

أدرس ومثل مبيانيا الدالة f في الحالات التالية

$$a): f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} \qquad b): f(x) = \frac{2|x|}{x^2+1} \qquad c): f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

تمارين و حلولها

تمرين1

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج) حدد $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

2- أ) بين أن $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \quad \forall x \in D_f$

ب) أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0

4- بين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

5- بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

6- أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

أ) نحدد D_f

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

ب) نحدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 1 + \frac{1}{x-2} = -\infty$$

ج) حدد $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ و أول النتيجتين هندسيا

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} x - 1 + \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} x - 1 + \frac{1}{x-2} = -\infty$$

ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى $\left(C_f\right)$

-2 أ) نبين أن $\forall x\in D_f \quad f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$$

f دالة قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $\mathbb{R}-\{2\}$ (لأن f دالة جذرية)

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$$

ب) ندرس تغيرات f و نعطي جدول تغيراتها

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-3)(x-1)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

-3 نحدد معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الأفصول 0

معادلة المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الأفصول 0 هي $y=f'(0)x+f(0)$

أي هي $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}$

-4 نبين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

$$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad 4-x\in\mathbb{R}-\{2\}$$

و $f(4-x)=3-x+\dfrac{1}{2-x} \quad ; \quad 2-f(x)=2-x+1-\dfrac{1}{x-2}=3-x+\dfrac{1}{2-x}$

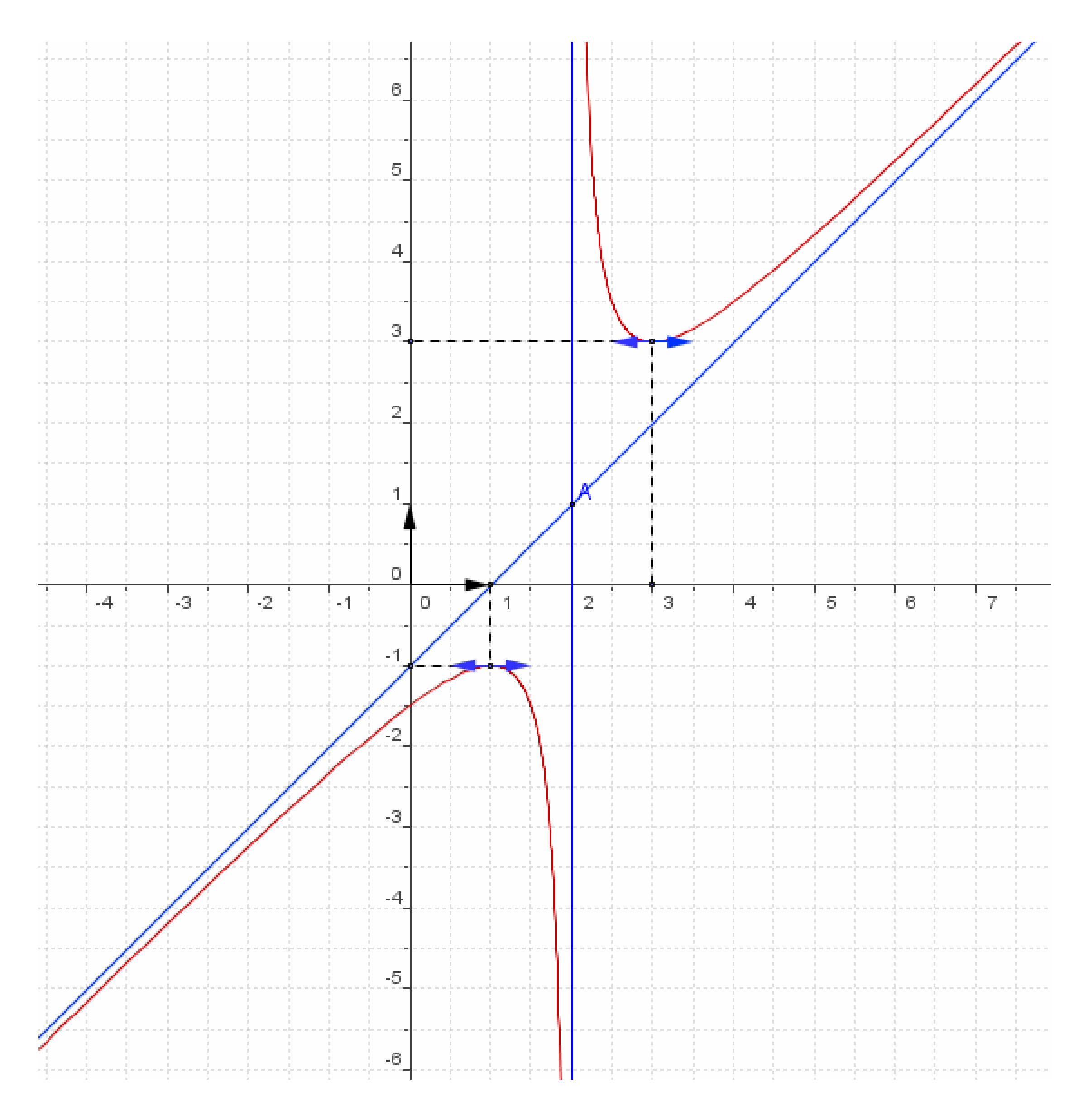
ومنه $f(4-x)=2-f(x)$ إذن $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى $\left(C_f\right)$

-5 نبين أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

إذن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$

-6 ننشئ $\left(C_f\right)$



تمرين2

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=1+\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$

1- حدد D_f و حدد نهايات f عند محدات D_f

2- حدد $f'(x)$ لكل x من D_f

3- أدرس تغيرات f

4- أ- بين أن C_f يقبل $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف.

ب- بين أن $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

5- أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ المنحنى C_f

<u>الجواب</u>

$$f(x)=1+\frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

2- نحدد D_f و نحدد نهايات f عند محدات D_f

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad et \quad x \neq 2$

إذن $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim_{x\mapsto\pm\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto\pm\infty} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = 1$ لأن $\lim_{x\mapsto\pm\infty} \frac{1-2x}{x^2-x-2} = \lim_{x\mapsto\pm\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x\mapsto\pm\infty} \frac{-2}{x} = 0$

لدينا $\lim_{x\mapsto 2} x^2 - x - 2 = 0 \qquad \lim_{x\mapsto 2} 1-2x = -3$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

ومنه $\lim_{x\mapsto 2^+} f(x) = \lim_{x\mapsto 2^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim_{x\mapsto 2^-} f(x) = \lim_{x\mapsto 2^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

لدينا $\lim_{x\mapsto -1} x^2 - x - 2 = 0 \qquad \lim_{x\mapsto -1} 1-2x = 3$

ومنه $\lim_{x\mapsto -1^+} f(x) = \lim_{x\mapsto -1^+} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = -\infty$ و $\lim_{x\mapsto -1^-} f(x) = \lim_{x\mapsto -1^-} 1 + \frac{1-2x}{x^2-x-2} = +\infty$

2- نحدد $f'(x)$ لكل x من D_f

$$f'(x) = \frac{(1-2x)'(x^2-x-2) - (x^2-x-2)'(1-2x)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-x-2) - (2x-1)(1-2x)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+2x+4+4x^2-4x+1}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}$$

3- ندرس تغيرات f

$\forall x \in D_f \qquad f'(x) = \frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x^2-2x+5$

$\Delta = 4 - 40 = -36$

اذن $\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2x^2-2x+5 \succ 0$

جدول التغيرات f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	‖	+	
f	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

4- أ- نبين أن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف.

$$\forall x \in D_f \qquad f''(x) = \frac{-2(2x-1)(x^2-x+7)}{(x^2-x-2)^3}$$

$f''(x)$ تنعدم في $\frac{1}{2}$ مع تغيير الإشارة إذن C_f يقبل $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ كنقطة انعطاف

ب- نبين أن $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

$$\forall x \in D_f \qquad 1-x \in D_f$$

$$f(1-x) = 1 + \frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2-(1-x)-2} = 1 - \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

$$2 - f(x) = 2 - 1 - \frac{1-2x}{x^2-x-2} = 1 - \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

إذن $f(1-x) = 2 - f(x)$ ومنه $I\left(\frac{1}{2};1\right)$ مركز تماثل لـ C_f

د- نحدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I

معادلة المماس لـ C_f عند النقطة I هي $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$

أي $y = \frac{8}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$ ومنه $y = \frac{8}{9}x + \frac{5}{9}$

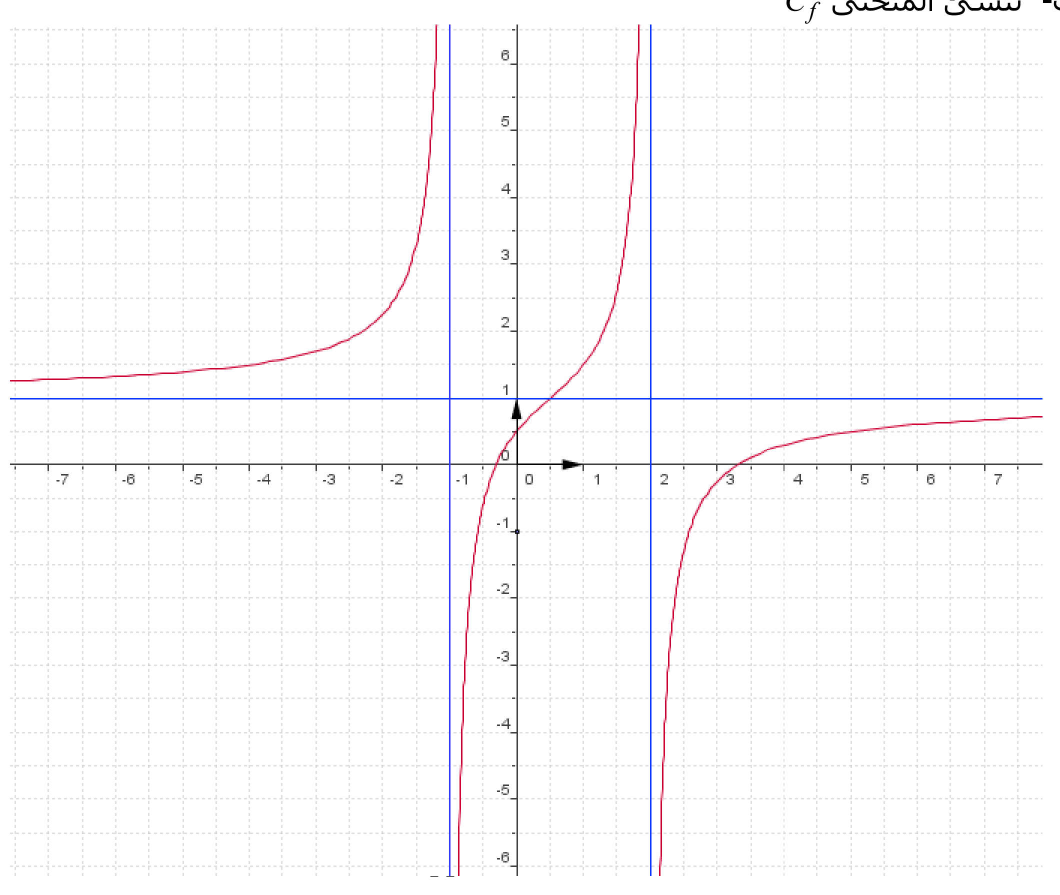
5- أ- ندرس الفروع اللانهائية

لدينا $\lim_{x \mapsto \pm\infty} f(x) = 1$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=1$ مقارب أفقي للمنحنى C_f

لدينا ومنه $\lim_{x \mapsto 2^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \mapsto 2^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى C_f

لدينا $\lim_{x \mapsto -1^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \mapsto -1^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى C_f

ب- ننشئ المنحنى C_f



تمرين3

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

1- حدد D_f و $\lim_{x\to 0} f(x)$

2- أ- بين أن f دالة دورية و حدد دورها

ب تأكد أن f زوجية استنتج D_E مجموعة دراسة f

3- أدرس تغيرات f على D_E

4- أنشئ المنحنى C_f

الجواب

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

5- نحدد D_f و $\lim_{x\to 0} f(x)$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f \Leftrightarrow \cos x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

6- أ- نبين أن f دالة دورية و حدد دورها

$x-2\pi\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\} \quad 2\pi+x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

$f(x+2\pi)=\dfrac{1+\cos(x+2\pi)}{1-\cos(x+2)}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$ اذن f دالة دورية و حدد دورها 2π

ب- نتأكد أن f زوجية نستنتج D_E مجموعة دراسة f

$-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\} \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

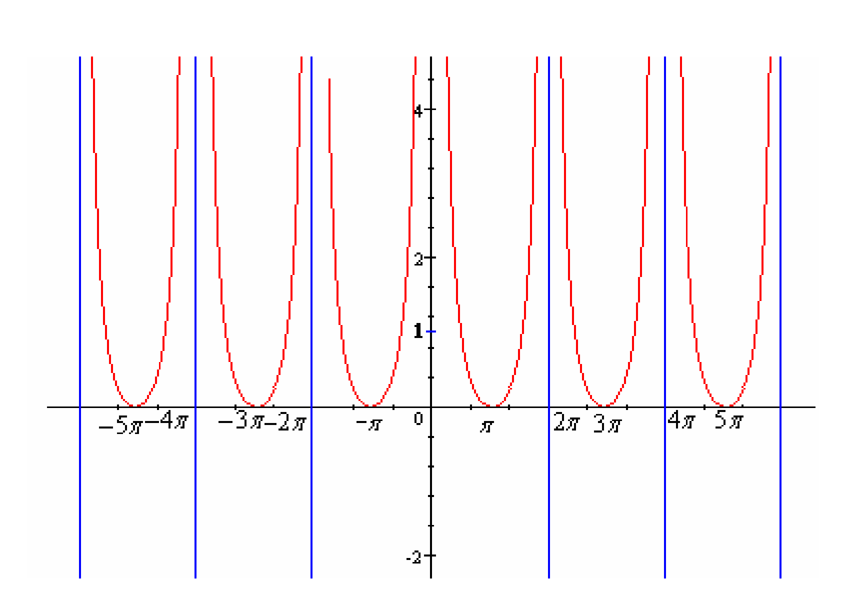
$f(-x)=\dfrac{1+\cos(-x)}{1-\cos(-x)}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=f(x)$ إذن f زوجية ومنه $D_E=]0;\pi]$

7- ندرس تغيرات f على D_E

$f'(x)=\dfrac{(-\sin x)(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2} \quad \forall x\in]0;\pi]$

x	0	π
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

8- أنشئ المنحنى C_f



تمرين4

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ) حدد D_f

ب) بين أن f دالة فردية

د) بين أن f دورية دورها 2π

ج) بين $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

2- أ) بين أن $f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x} \quad \forall x\in\left]0;\pi\right[$

ب) أدرس تغيرات f على $\left]0;\pi\right[$ و أعط جدول تغيراتها

3- أ) حدد تقعر (C_f)

ب) أنشئ (C_f)

الجواب

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

2- أ) نحدد D_f

$$D_f=\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$$

ب) نبين أن f دالة فردية

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \quad : \quad -x\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(-x)=\frac{1-\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{1-\cos x}{-\sin x}=-=\frac{1-\cos x}{\sin x}=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

د) نبين أن f دورية دورها 2π

$x+2\pi\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \qquad \forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

$$f(x+2\pi)=\frac{1-\cos(x+2\pi)}{\sin(x+2\pi)}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=f(x)$$

f دورية دورها 2π

ملاحظة: بما أن f دورية دورها 2π و f دالة فردية فان مجموعة الدراسة هي $D_E=\left]0;\pi\right[$

ج) نبين $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ ثم نحدد $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$ مع تأويل النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+} x\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}=0\times\frac{\frac{1}{2}}{1}=0$$

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=+\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x=\pi$ مقارب للمنحنى (C_f)

2- أ) نبين أن $f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x} \quad \forall x\in\left]0;\pi\right[$

$$\forall x\in\left]0;\pi\right[\quad f'(x)=\frac{\sin^2 x-(1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{1+\cos x}$$

ب) ندرس تغيرات f على $\left]0;\pi\right[$ و نعطي جدول تغيراتها

$\forall x \in \left]0;\pi\right[\quad f'(x) \succ 0$ لأن $\forall x \in \left]0;\pi\right[\quad 1+\cos x \succ 0$

ومنه f تزايدية على $\left]0;\pi\right[$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
f	0 $\nearrow$ $+\infty$

3- أ) نحدد تقعر $\left(C_f\right)$

لدينا $\forall x \in \left]0;\pi\right[\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$

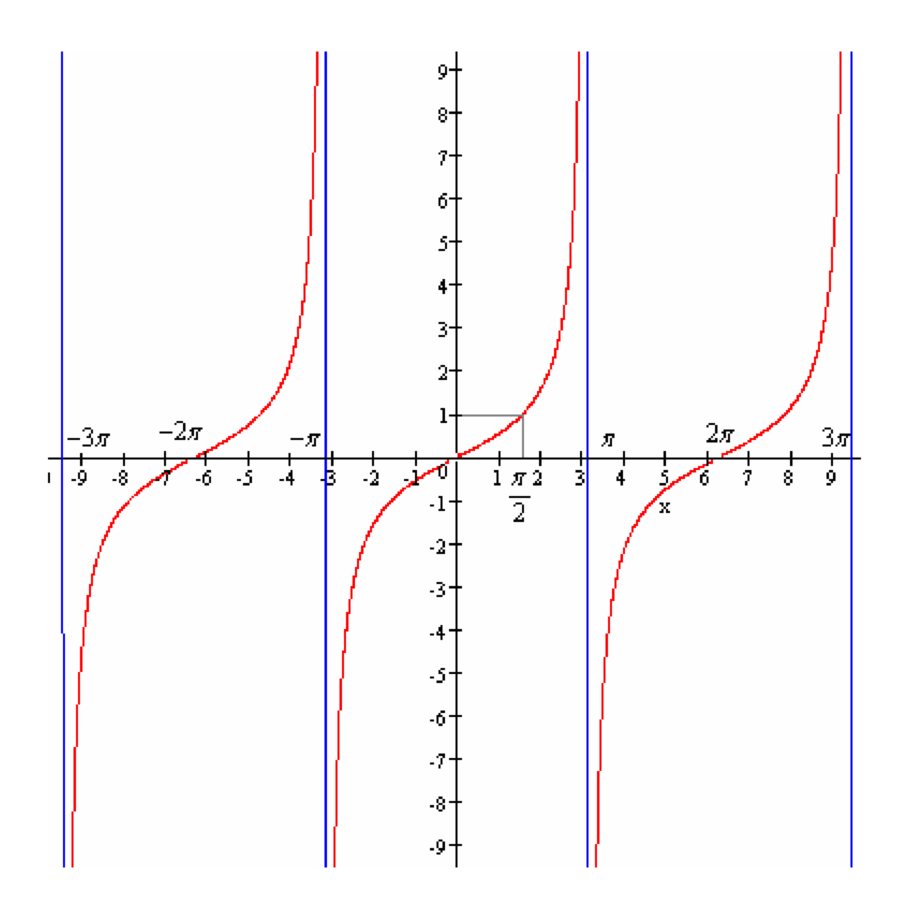
$\forall x \in \left]0;\pi\right[\quad f''(x) = \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ π
$f''(x)$	$+$

إذن $\left(C_f\right)$ محدب على $\left]0;\pi\right[$ و حيث f فردية فان $\left(C_f\right)$ مقعر على $\left]-\pi;0\right[$

وبما أن f دورية دورها 2π فان $\left(C_f\right)$ محدب على كل مجال من شكل $\left]2k\pi;\pi+2k\pi\right[$ و مقعر على $\left]-\pi+2k\pi;2k\pi\right[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$


ب) ننشئ $\left(C_f\right)$



تمرين1

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| \succ 1 \end{cases}$$

1- أ) أدرس اتصال في النقطتين 1 و -1

ب) أدرس اشتقاق f في النقطتين 1و -1 و أول النتائج هندسيا

2- أ) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

ب) أدرس تغيرات f

3- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.

5- أدرس تقعر C_f

6- أنشئ C_f

الجواب

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} & |x| \succ 1 \end{cases}$$

4- أ) ندرس اتصال في النقطتين 1 و -1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x - \sqrt{1-x^2} = 1$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = 1$

ومنه $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ اذن f متصلة في 1

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x - \sqrt{1-x^2} = -1$ و $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} = -1$

ومنه $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ اذن f متصلة في -1

ب) ندرس اشتقاق f في النقطتين 1و -1 و نؤول النتائج هندسيا

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-\sqrt{1-x^2}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}\sqrt{x+1} = \lim_{x\to 1^-} 1 + \sqrt{\frac{1}{1-x}}\sqrt{x+1} = +\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يسار1 و منحنى f يقبل نصف مماس عمودي على يسار 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2} + \frac{\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يمين1 و منحنى f يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$ على يمين 1

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-\sqrt{1-x^2}+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} 1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\sqrt{1-x} = \lim_{x\to -1^+} 1 - \sqrt{\frac{1}{1+x}}\sqrt{1-x} = -\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق على يمين -1 و منحنى f يقبل نصف مماس عمودي على يمين -1

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2+1} + 1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{2} + \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{2} + \frac{x+1}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق على يسار-1 و منحنى f يقبل نصف مماس معامله الموجه $\frac{1}{2}$ على يسار -1

5- أ) نحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;1[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{x^2+1-2x^2}{x^2+1}=\frac{2}{2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x^2+1}$$

ب) ندرس تغيرات f

لدينا $\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\sqrt{1-x^2}}$

$$\forall x\in[0;1[\quad f'(x)\succ 0$$

$$\forall x\in]-1;1[\qquad f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)\sqrt{1-x^2}}$$

إشارة $f'(x)$ على $]-1;0[$ هي إشارة $1-2x^2$ على $]-1;0[$

$$x\in]-1;0[\qquad f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه $f'(x)\succ 0 \qquad \forall x\in\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[\qquad f'(x)\le 0 \qquad \forall x\in\left]-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ومنه $f'(x)\succ 0 \qquad \forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖ -	0	+ ‖	+
f	$-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\sqrt{2}$ ↗	1 ↗	$+\infty$

6- ندرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم الوضع النسبي لـ C_f و مقاربه.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2+1}=-\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ ومنه المستقيم (D) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مقارب للمنحنى C_f

$$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{x}{x^2+1}$$

و منه C_f فوق (D) على $]1;+\infty[$ و C_f تحت (D) على $]-\infty;-1[$

5- ندرس تقعر C_f

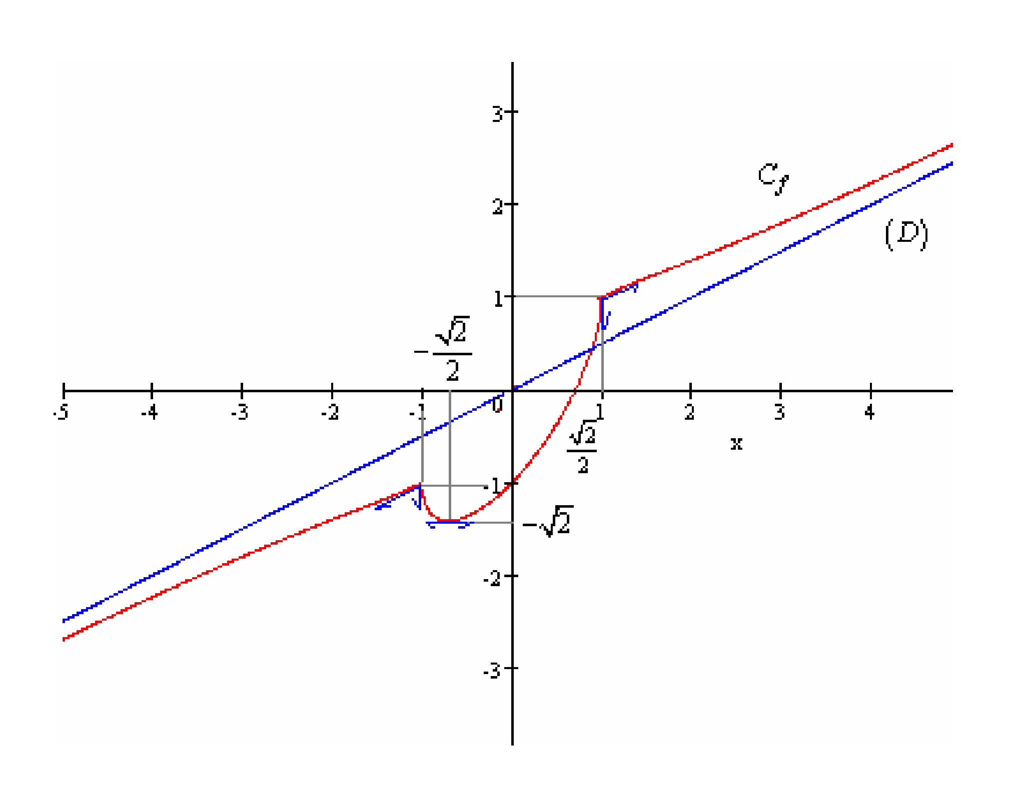
$\forall x\in]-1;1[\qquad f''(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}\succ 0$ ومنه C_f محدب على $]-1;1[$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\qquad f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ومنه :

$f''(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\prec 0$ $\forall x\in\left]1;+\infty\right[$ أي C_f مقعر على $\left]1;+\infty\right[$

$f''(x)\succ 0$ $\forall x\in\left]-\infty;-1\right[$ أي C_f محدب على $\left]-\infty;-1\right[$

6- ننشئ C_f



تمرين2

نعتبر الدالة العدية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2- أ- بين أن 2π دور للدالة f

ب- بين أن $f(x+\pi)=-f(x)$ $\forall x\in D_f$

3- أحسب $f'(x)$

4- أدرس تغيرات f على $[0;\pi]\cap D_f$

5- أنشئ منحنى قصور الدالة f على $[0;2\pi]\cap D_f$

الجواب

$$f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$$

3- نحدد D_f

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \quad et \quad \cos x \neq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left(x \neq k\pi \quad et \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad / k \in \mathbb{Z}$$

اذن $D_f = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

4- أ- بين أن 2π دور للدالة f

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{\sin(x+2\pi)} + \frac{1}{\cos(x+2\pi)} = f(x)$$

إذن 2π دور للدالة f

ب- نبين أن $f(x+\pi) = -f(x) \qquad \forall x \in D_f$

$$\forall x \in D_f \qquad f(x+\pi) = \frac{1}{\sin(x+\pi)} + \frac{1}{\cos(x+\pi)} = \frac{1}{-\sin x} + \frac{1}{-\cos} = -f(x)$$

3- نحسب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \cos x \cdot \sin x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{(\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

4- ندرس تغيرات f على $[0;\pi] \cap D_f$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x - \cos x$

$$x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\qquad \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		-	0	+	‖	+	
f	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

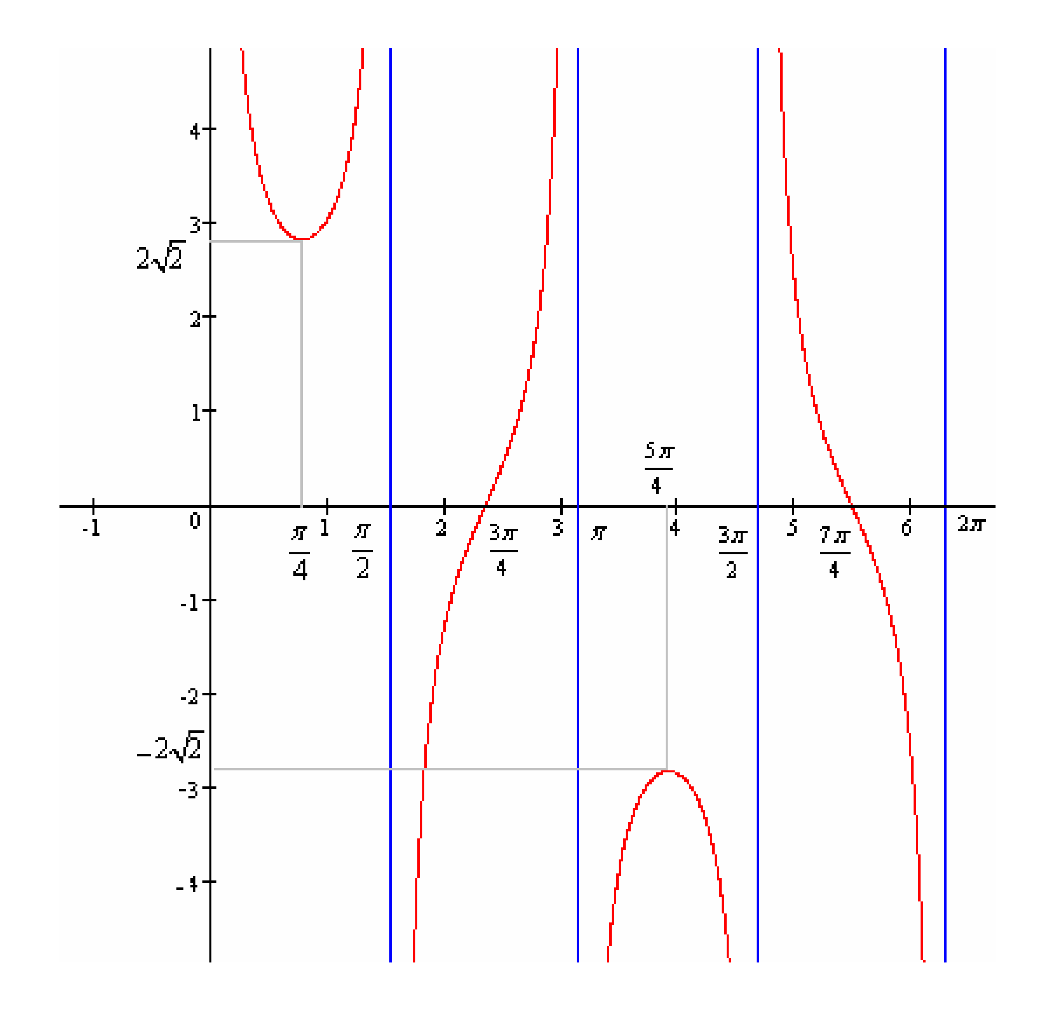
5- ننشئ منحنى قصور الدالة f على $[0;2\pi] \cap D_f$

$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \pi$ مقارب للمنحنى C_f

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى C_f

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ مقارب للمنحنى C_f

ننشئ C_f على $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ و نستنتج الجزء الأخر على $\left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ حيث $f(x+\pi) = -f(x)$



4
3
$2\sqrt{2}$
2
1
$\frac{5\pi}{4}$
-1
0
$\frac{\pi}{4}$
1
$\frac{\pi}{2}$
2
$\frac{3\pi}{4}$
3
π
4
$\frac{3\pi}{2}$
5
$\frac{7\pi}{4}$
6
2π
-1
-2
$-2\sqrt{2}$
-3
-4